CONSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES: EL APORTE DE DEDEKIND, 1872

Víctor Manuel Uribe Villegas

Docente de Carrera de la Institución Universitaria Antonio José Camacho

Grupo de Investigación en Pedagogía

Lo que es demostrable no debe aceptarse en ciencia sin demostración. Por evidente que parezca esta exigencia, según creo, no hay que considerarla satisfecha ni siquiera en la fundamentación de la ciencia más sencilla, aquella parte de la lógica que trata de la teoría de los números, ni aun en las exposiciones más recientes (Dedekind, 1888).

RESUMEN

El tratamiento de los objetos matemáticos que hoy hacemos con tanta naturalidad, invisibilidad, en muchas ocasiones, aquellos momentos de inspiración de la mente humana en el que nacieron y aquellos momentos de efervescencia epistemológica que arroparon su constitución. Tal es el caso del concepto de conjunto de números reales como un objeto matemático continuo. Su tratamiento en la escuela pasa tan desapercibido, que las pruebas diagnósticas universitarias develan un desconocimiento, por parte de los estudiantes, de las propiedades de orden, de densidad y de continuidad de dicho conjunto.

El presente documento pretende mostrar un breve esbozo histórico de la constitución de los números reales, resaltando, especialmente, los aportes de Richard Dedekind, quien logró, de manera inspiradora, desprenderse de la geometría, para lograr dicha constitución. Este trabajo hace parte de los análisis históricos y epistemológicos que surgen del proyecto de investigación doctoral titulado "Una estrategia didáctica, mediada por TIC, para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones de variable real y sus sistemas de representación".

PALABRAS CLAVES

Continuidad, Cortaduras, Números reales.

ABSTRACT

The treatment of the mathematical objects that we do today with so much naturalness, invisibility, in many occasions, those moments of inspiration of the human mind in which they were born and those moments of epistemological effervescence that they constituted. Such is the case of the concept of a set of real numbers as a continuous mathematical object. Their treatment in school goes so unnoticed that the university diagnostic tests reveal a lack of knowledge of the properties of order, density and continuity of the set.

The present document aims to show a brief historical sketch of the constitution of real numbers, especially highlighting the contributions of Richard Dedekind, who was able to inspire geometry to achieve this constitution. This work is part of the historical and epistemological analyzes that emerge from the doctoral research project titled "A didactic strategy, mediated by ICT, to strengthen the teaching and learning process of the functions of real variable and its representation systems."

KEYWORDS

Continuity, Cuttings, Real numbers

INTRODUCCIÓN

El proceso de constitución de los números reales inició hace más de 2000 años. Un momento relevante fue el descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por parte de los Pitagóricos; y podríamos decir que empezó su formalización, como objeto matemático, con el trabajo de muchas mentes brillantes, entre ellas, el aporte de Richard Dedekind en 1872 con su obra clásica "Continuidad y números irracionales".

Richard Julios Wilhelm Dedekind nació el 6 de octubre de 1831 en Brunswick, Alemania, dentro de una familia que le propiciaba todo un ambiente académico (Hawking, S., 2006). Inició sus estudios en la universidad de Gotinga en 1850 y se interesó en toda la oferta matemática de los cursos que dicha universidad ofrecía, logrando asistir a clases con matemáticos relevantes de la época y de la historia de las matemáticas como Carl Friedrich Gauss y como Georg Friedrich Bernhard Riemann. También tuvo la oportunidad de trabajar con Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet sobre teoría de números.

El aporte de Dedekind se caracterizó por tomar distancia de la concepción del continuo como un objeto dado que no necesitaba evidencias matemáticas, característica propia de las concepciones físicas del tiempo y el espacio dadas por científicos de la época para evitar las paradojas de Zenón[1]. Dedekind constituyó el continuo en los números reales con una propiedad pura, demostrable y concebible matemáticamente, desligada de concepciones geométricas.

LAS PRIMERAS PINCELADAS: HACIA LA CONSTITUCIÓN DE LOS REALES

A lo largo de la historia tanto matemáticos como filósofos habían trabajado con el concepto de infinito y todo lo que subyace dentro del mismo, permitiendo realizar aportes hacia la construcción teórica de los reales. Al realizar una mirada a la historia de las matemáticas observamos cómo sus diferentes aportes se entrelazaban, de una u otra manera, con referentes geométricos.

Por ejemplo, con Euclides (330–275, a.C.) sobresale el logro de asociarle a una figura rectilínea un cuadrado de igual área, la teoría de las proporciones y el intento de la cuadratura del círculo haciendo uso de su método exhaustivo; con Arquímedes (287–212 a.C.) resalta la aproximación que realiza a una constante mediante la razón entre la circunferencia de un círculo de radio r y su radio; mucho después, con Cavalieri (1598–1647) destaca cómo mediante el cálculo de algunas cuadraturas particulares se sugiere una generalización para la integral de x de grado n; con Descartes (1596–1650) es relevante el aporte a la generalización de todo un universo de curvas algebraicas; y con Newton (1643–1727) y Leitniz (1646–1716) se observa cómo a través de las cuadraturas se formula el teorema fundamental del cálculo.

Dichos aportes, mostraban la gran ausencia conceptual que existía en torno a las concepciones del infinito matemático y hacia el pensamiento infinitesimal; pero al mismo tiempo se avanzaba hacia su constitución a partir de referentes del mundo real y del mundo geométrico.

HACIA DEDEKIND Y SUS CORTADURAS

En el siglo XIX, el desarrollo del álgebra y del análisis estaba acompañado de una falta de estructuración clara y precisa de los números reales. Conceptos como límites, continuidad, infinito y series de Fourier requerían con urgencia una formalización de lo que subyacía dentro de

[1] Estos se basaban en la divisibilidad del espacio y del tiempo hasta el infinito, haciendo imposible el movimiento.

los números reales. Es Bolzano (1781–1848), quien inicia un llamado de atención al respecto, al no aceptar que demostraciones geométricas suplieran demostraciones de la disciplina de las matemáticas, como se muestra a continuación:

El tipo más común de demostración depende de una verdad copiada de la geometría, a saber, que cada línea continua de curvatura simple de la cual las ordenadas son primero positivas y luego negativas (o recíprocamente) debe necesariamente atravesar el eje de las abscisas en un punto situado en las ordenadas. No hay en absoluto nada que objetar contra la exactitud de esta proposición geométrica, ni contra su evidencia. “Pero también es claro que resulta una ofensa intolerable contra el buen método pretender derivar verdades de las matemáticas puras (o generales) – esto es la aritmética, álgebra, análisis – a partir de consideraciones que pertenecen a una parte meramente aplicada (o especial), a saber, la geometría. Traducción libre de los autores. Bolzano, citado en [Bon02, p.18].”

Y es aquí, en el año de 1870, donde emergen en la escena histórica varios matemáticos como Meray, Cauchy, Weierstrass, Richard Dedekind, entre otros, que tratan de elaborar una teoría que diera soporte a las técnicas del cálculo, dando aportes cada uno a propuestas interesantes que iban consolidando, y a la vez develando, todo sobre los números reales y su constitución formal.

Estos aportes se pueden sintetizar de la siguiente manera:

- Agustin-Louis Cauchy (1789–1857) dio una primera idea de lo que era un número real, en el Cours, donde justificaba que: “… Un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él”. Dicha afirmación interpretada como la definición de los números irracionales, fue un error de razonamiento señalado por Méray.

- Bernhard Bolzano (1781–1848) intentó axiomatizar los números reales a partir de la resolución de límites de sucesiones de números racionales logrando establecer la existencia de una cota superior para un conjunto acotado de números reales.

- Sir William Hamilton (1805 1865). El primero en divulgar una construcción para los números irracionales mediante dos artículos que fueron publicados con el título de Algebra as the science of pure time.

- Charles Méray (1835–1911) publicó un artículo en 1869, Nouveau precis d’analyse infinitésimale, en el que definió los números reales basado en los números racionales, construyendo así la primera teoría sobre los reales.

- Weierstrass (1815–1897) se da cuenta que para definir una teoría del análisis basada en el concepto de número, debería definir los números irracionales independiente del concepto de límite.

- George Cantor (1845 – 1918) planteó una teoría similar a la de Méray, basada en los números racionales, con la que forma sucesiones fundamentales y relaciones de equivalencia entre ellas, permitiéndole así definir números irracionales.

- Richard Dedekind (1831–1916) define o establece la continuidad en términos de definición de cortes sobre una recta. Lo admirable de Dedekind, es que no asume el continuo en los reales, sino que es él quien lo crea rigurosamente, y el primer paso que da para dicha construcción es asumir el dominio de los números racionales con un dominio rigurosamente definido.

DEDEKIND Y SUS CORTADURAS

El primer paso que realiza Dedekind es caracterizar los racionales R con sus respectivas propiedades:

I. Propiedad del orden. Propiedad transitiva. Si $a<b$ y $b<c$, entonces a<c.

II. La propiedad de densidad. Si a y c son números distintos, existe siempre infinitos números b que están entre *a* y *c*.

III. La propiedad de la cortadura, que juega un papel muy importante. Si *a* es un número determinado, todos los números del sistema *R* se descomponen en dos clases, A_1 y A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1, abarca todos los números a_1, que son $<a$, la segunda clase A_2 abarca todos los números a_2, que son $>a$; el número a puede asignarse arbitrariamente a la primera clase o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es, o bien el mayor número de la primera clase, o el menor número de la segunda. En cada caso la división del sistema *R* en las dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2.

Posteriormente, Dedekind realiza una comparación de los números racionales con los puntos de una línea recta, en otras palabras, descarga las propiedades de los números racionales sobre la recta numérica realizando un salto importante, hacia la desgeometrización de la construcción de objetos matemáticos. En dicha comparación se evidencia el desprendimiento analítico que realiza Dedekind de la geometría, especialmente en el tercer numeral de los tres que realiza, el cual dice:

1. Si *p* es un punto determinado de *L*, todos los puntos *L* se descomponen en dos clases, P_1, P_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase P_1 abarca los puntos p_1 que están a la izquierda de *p*, y la segunda clase P_2, abarca todos los puntos p_2 que están a la derecha de *p*; "el punto *p* puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase. En cada caso, la descomposición de la recta *L* en ambas clases o partes P_1, P_2 es tal que todo punto de la primera P_1 está a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2."

Al poder asignar un punto *p*, de una recta a una y solo una de las dos clases P_1, P_2, Dedekind se está desprendiendo de la concepción geométrica (Euclidiana), en la cual, al dividir un segmento por un punto *p*, el punto *p* haría parte de los extremos de los segmentos que se obtienen. Este hecho es fundamental para construir la continuidad en el dominio de los números reales.

La propiedad de la cortadura se relaciona con la definición de la continuidad, evidenciando un distanciamiento con lo geométrico, pues esta propiedad no es posible geométricamente. A partir de este instante, no se refiere a la recta como números sino como una relación entre puntos, donde el punto adquiere una identidad.

Tener un dominio de puntos es poder operar de manera consistente con ellos. Dedekind al descargar la estructura de los números racionales en la recta, permite realizar operaciones con ella. Al tomar una unidad *u* y un número *p/q* podemos ubicar *p/q* en la recta.

Se hace esencial para Dedekind formular cortaduras generadas por números no racionales, con esto demuestra que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2, este hecho genera que los racionales o están en A_1 o en A_2, mostrando así, que $\sqrt{2}$ genera una cortadura, llevando a definir un orden en el nuevo dominio.

Así las cosas, Dedekind en la constitución de los reales hace referencia a la compatibilidad, es decir, que haya una extensión al dominio puro. Que el nuevo dominio de los reales tenga todas las propiedades del dominio Q, pero que a su vez tenga una nueva propiedad que es la de la continuidad. Demuestra que en el nuevo dominio se cumplen las propiedades de los números racionales, pero se encontró en la obligación de demostrar que el nuevo dominio cumple con la propiedad de la continuidad: la completez[2] de los reales *(R)*.

En su obra, “Continuidad y números irracionales”, Dedekind hace una construcción y una presentación de los números reales más sistemática, abstracta y simple que otras construcciones.

LA METAMORFOSIS DEL CONCEPTO

El concepto de número real ha vivido diferentes institucionalizaciones de acuerdo a las concepciones de las épocas en los que se abordó la problemática del mismo. Un estudio realizado por Lyda Constanza Mora Mendieta y Johana Andrea Torres Díaz, respecto a las concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales en el 2004, permite observar la siguiente transformación del concepto de número:

- Como tratamiento aritmético

Las edades antiguas y media, en las civilizaciones orientales y el renacimiento italiano con el Ars Magna de Cardano, son las que muestran esta concepción. Las representaciones de tipo simbólico son las asociadas a esta concepción.

- Como magnitudes geométricas

La antigua Grecia, el trabajo desarrollado por Stevin en la edad moderna, pasando por la época de oro de las matemáticas griegas, se caracterizan por dicha concepción. El concepto de número real está asociado al proceso de medir y las representaciones presentes en la misma son verbales y geométricas.

- Como cantidad continua y discreta

En el siglo XVI se enmarca el inicio de dicha concepción, partiendo con el trabajo del matemático Simón Stiven, entre otros. Prima en esta concepción la notación simbólica.

- Como expresiones algebraicas y analíticas

A los siglos XVII y XVIII pertenece dicha concepción. Las representaciones usadas son simbólicas usando operaciones con notaciones fraccionarias continuas, series y el uso de letras o caracteres especiales para asignarle a algunos números.

- Como objeto matemático

A finales del siglo XIX se fortalece dicha concepción. Aquí el número real ya es un objeto matemático con una concepción de carácter estructural.

Una figura que representa las diferentes concepciones históricas de los números reales se expone en el trabajo de Mora, L. y Torres, J. (2004). Aquí se resumen los aspectos más importantes de cada concepción.

[2] COMPLETEZ DE LOS REALES (R): Si el sistema R de todos los números reales se descompone en dos clases A1 y A2 tales que todo número α1 de la primera clase A1 es menor que todo número α2 de la segunda clase A2, luego existe uno y sólo un número α mediante el cual se produce esta división [Ded98, p. 90].

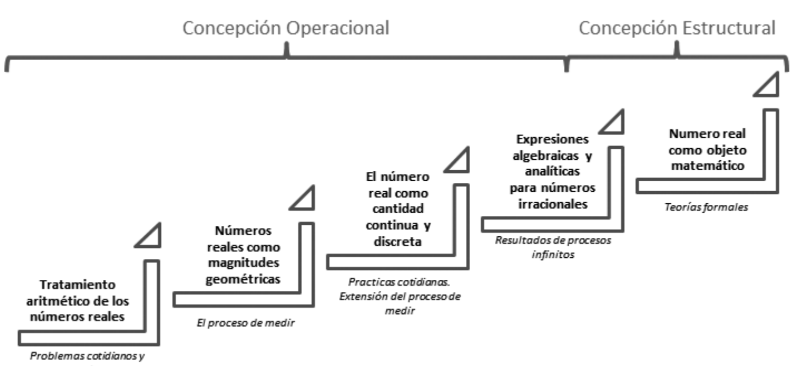

Fig. 13. *Adaptación Mora, L. y Torres, J. (2004)*

DEDEKIND, UN REFERENTE EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El estudio histórico de la constitución de los reales como objeto matemático, muestra distintos acontecimientos y situaciones importantes que se podrían recrear en el aula de clase para la comprensión formal de los números reales en los estudiantes tanto de secundaria como en la universidad.

La tarea, para nosotros los maestros de matemáticas, se plantea en términos del diseño de actividades, que permitan generar en los estudiantes cuestionamientos interesantes frente a las nociones de lo infinito y de lo infinitesimal, y es aquí donde la construcción de los números reales como objeto matemático de Dedekind surge como referente para transponer didácticamente en los procesos de enseñanza debido a su carácter sistemático.

CONCLUSIONES

La constitución de los números reales como objeto matemático, a través de las cortaduras de Dedikind, permitieron generar confianza en las matemáticas y confirmar, una vez más, el estatus puro de abstracción y de formalismo que estas tienen. Dedekind, al trasvasar las propiedades numéricas de los racionales en la recta numérica, alcanza un gran nivel de pureza elogiando el buen método que reclamaba Bolsano frente a la concepción de límite que realizaba Cauchy.

Así, la construcción de los números reales como un objeto continuo y todos los aportes y esfuerzos por diferentes matemáticos para lograr dicha constitución, reflejan un acto puramente humano en el corazón de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arbeláez, G. y Gálvez F. (2011). "El conjunto de los números reales como objeto matemático: la 'construcción' de Dedekind", en Luis Recalde y Guillermo Ortiz (Eds.), Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica. Cali: Universidad del Valle, (pp 135-162).

Dedekind, R. (1888) ¿Qué son y para qué sirven los números? Recuperado de: https://es.scribd.com/document/89030013/R-Dedekind-Que-son-y-para-que-sirven-los-numeros

Devlin, K. (2002). El lenguaje de las matemáticas. Intermedio Editores (pp 155–156).

Hawking, S. (2007). Dios creó los números. Editorial Crítica. (pp 781–784) y (pp 823–833).

Mankiewicz, R. (2002). Historia de las matemáticas: del cálculo al caos. Paidós (pp 150–152)

Mora, L. y Torres, J. (2004). Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales. Tesis de maestría. Universidad nacional.

AUTOR

Víctor Manuel Uribe Villegas: Docente de carrera de la UNIAJC. Candidato a Magister en Educación con énfasis en Educación Matemática. Candidato a Doctor en Ciencias Pedagógicas. Pertenece al Grupo de Investigación en Pedagogía (GIP) de la UNIAJC. Email: vuribe@admon.uniajc.edu.co